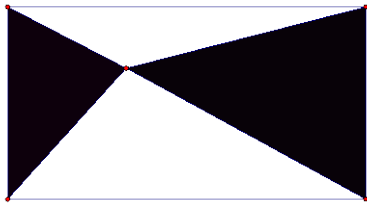
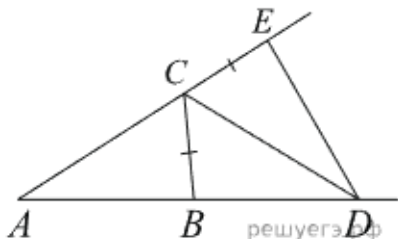


**Устная командная олимпиада 7-8 класс**  
**12.11.2022 г.**

- № 1. В треугольнике  $ABC$  угол  $A$  равен  $30^\circ$ , угол  $B$  равен  $86^\circ$ ,  $CD$  — биссектриса внешнего угла при вершине  $C$ , причем точка  $D$  лежит на прямой  $AB$ . На продолжении стороны  $AC$  за точку  $C$  выбрана такая точка  $E$ , что  $CE = CB$ . Найдите угол  $BDE$ . Ответ дайте в градусах
- № 2. Семиклассник Юра все натуральные числа, начиная с единицы, стал записывать подряд в порядке возрастания. Какая цифра стоит на сотом месте, а какая — на тысяча первом?
- № 3. Полина любит математику, но не любит рисовать. Когда у неё не получился набросок вазы, она разорвала его на 10 частей, потом некоторые из них — еще на 10 и т.д. Вскоре Полинина мама заглянула в комнату и сказала сердито: «Зачем ты разбросала по полу 500 клочков бумаги?» Полина тут же ответила: «Вовсе не пятьсот, а тысячу!». Кто не прав: мама или Полина? Докажите.
- № 4. В одном стакане десять ложек воды, в другом — десять ложек молока. Восьмиклассник Амид ложку воды из первого стакана перелил во второй. Смесь энергично взболтал, а затем ложку полученной смеси перелил в первый стакан. Спрашивается, чего будет больше: молока в первом стакане или воды во втором?
- № 5. Площадь прямоугольника равна  $18 \text{ см}^2$ . Соня закрасила часть прямоугольника, как показано на рисунке. Какова площадь закрашенной части?
- 
- № 6. Винни Пух и Пятачок могут полить огород за 35 минут. Пятачок и Кролик могут вместе полить этот же огород за 63 минуты. Кролик и Винни Пух вместе поливают огород за 45 минут. За сколько минут польют огород Винни Пух, Пятачок и Кролик, работая вместе?

## Задачи УКО с решениями

2. В треугольнике  $ABC$  угол  $A$  равен  $30^\circ$ , угол  $B$  равен  $86^\circ$ ,  $CD$  — биссектриса внешнего угла при вершине  $C$ , причем точка  $D$  лежит на прямой  $AB$ . На продолжении стороны  $AC$  за точку  $C$  выбрана такая точка  $E$ , что  $CE = CB$ . Найдите угол  $BDE$ . Ответ дайте в градусах



**Решение.**

Треугольники  $CBD$  и  $ECD$  равны по двум сторонам и углу, лежащему между ними, значит,  $\angle BDC = \angle CDE$ . Тогда

$$\angle BDE = 2\angle BDC = 2(180^\circ - \angle BCD - \angle CBD).$$

Учитывая, что  $\angle BCD = \angle BCE/2 = (\angle A + \angle B)/2 = 58^\circ$  и  $\angle CBD = 180^\circ - \angle B = 94^\circ$ , получим  $\angle BDE = 56^\circ$ .

- № 2. Все натуральные числа, начиная с единицы, записаны в порядке возрастания. Какая цифра стоит на сотом месте, а какая на тысяча первом?

**Решение.** В начале идет 9 однозначных чисел, затем 90 — двузначных чисел (180 цифр).

1)  $100 - 9 = 91$ , поэтому вначале стоят 9 однозначных, затем идет 45 двузначных чисел (заканчиваются числом 54) и первая цифра от 46 числа, то есть 5.

2)  $1001 - 9 - 90 \cdot 2 = 812 = 270 \times 3 + 2$ , поэтому вначале стоят 9 однозначных, затем идут 90 двузначных чисел, затем 270 трехзначных чисел, заканчиваются на  $9+90+270=369$ , а затем первая цифра числа 370, то есть 1001 цифра — это 7.

- № 3. Полина любит математику, но не любит рисовать. Когда у неё не получился набросок вазы, она разорвал его на 10 частей, потом некоторые из них — еще на 10 и т.д. Вскоре Полинина мама заглянула в комнату и сказала сердито: «Зачем ты разбросала по полу 500 клочков бумаги?» Полина тут же ответила: «Вовсе не пятьсот, а тысячу!». Кто не прав: мама или Полина? Докажите.

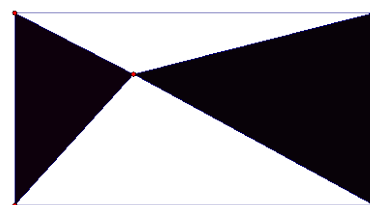
**Доказательство.** Каждый раз, когда вы рвете любой кусок бумаги на 10 частей, то прибавляете не 10, а 9 кусков к общему количеству. Поэтому всего кусочков м.б.  $10 + 9 + 9 + 9$  и т.д.

Поэтому мама не права: 500 не равно  $10 + 9 \cdot n$ .

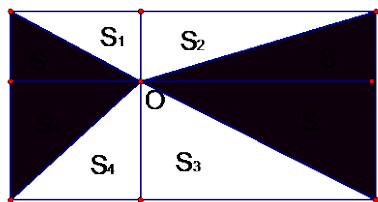
- № 4. В одном стакане десять ложек воды, в другом — десять ложек молока. Восьмиклассник Амид ложку воды из первого стакана перелил во второй. Смесь энергично взболтал, а затем ложку полученной смеси перелил в первый стакан. Спрашивается, чего будет больше: молока в первом стакане или воды во втором?

**Решение.** После того как ложку воды перелили во второй стакан, там стало 10 ложек молока и 1 ложка воды, то есть всего 11 ложек жидкости. Таким образом, одна ложка смеси содержит  $10/11$  ложки молока и  $1/11$  ложки воды. Переливаем одну ложку смеси в первый стакан: в нем теперь оказывается  $9 + 1/11$  ложки воды и  $10/11$  ложки молока, во втором стакане останется 10 ложек, причём каждая содержит ложки молока и ложки воды, то есть там находится  $10 \cdot 10/11 = 9 + 1/11$  ложки молока. Количество молока в первом стакане в точности равно количеству воды во втором стакане.

- № 5. Площадь прямоугольника равна  $18 \text{ см}^2$ . Какова площадь закрашенной части?



**Решение.** Через точку  $O$  проведём прямые, параллельные сторонам прямоугольника. Заметим, что прямоугольник оказывается разбит на 8 частей, попарно равных. Площадь закрашенной фигуры  $S_1 + S_2 + S_3 + S_4 = S_5 + S_6 + S_7 + S_8 = 18 \text{ см}^2 : 2 = 9 \text{ см}^2$ .



№ 6. Винни Пух и Пятачок могут полить огород за 35 минут. Пятачок и Кролик могут вместе полить этот же огород за 63 минуты. Кролик и Винни Пух вместе поливают огород за 45 минут. За сколько минут польют огород Винни Пух, Пятачок и Кролик, работая вместе?

Пусть Винни Пух поливает самостоятельно весь огород (берём его за 1) за  $B$  минут, Пятачок — за  $P$  минут и Кролик — за  $K$  минут. Тогда за одну минуту Винни поливает часть огорода, равную  $\frac{1}{B}$ , Пятачок —  $\frac{1}{P}$ , Кролик —  $\frac{1}{K}$ . Таким образом, сообщение о том, что Винни и Пятачок вместе поливают огород за 35 минут, математически выражается следующим уравнением:

$$\left(\frac{1}{B} + \frac{1}{P}\right) \cdot 35 = 1, \text{ что равносильно уравнению } \frac{1}{B} + \frac{1}{P} = \frac{1}{35}.$$

Составив аналогично два других уравнения, получим систему:

$$\begin{cases} \frac{1}{B} + \frac{1}{P} = \frac{1}{35}, \\ \frac{1}{P} + \frac{1}{K} = \frac{1}{63}, \\ \frac{1}{B} + \frac{1}{K} = \frac{1}{45}. \end{cases}$$

Сложив все уравнения системы, получим:

$$2\left(\frac{1}{B} + \frac{1}{P} + \frac{1}{K}\right) = \frac{1}{35} + \frac{1}{63} + \frac{1}{45}.$$

Приведём правую часть к общему знаменателю:

$$2\left(\frac{1}{B} + \frac{1}{P} + \frac{1}{K}\right) = \frac{9}{315} + \frac{5}{315} + \frac{7}{315},$$

$$2\left(\frac{1}{B} + \frac{1}{P} + \frac{1}{K}\right) = \frac{21}{315},$$

$$\frac{1}{B} + \frac{1}{P} + \frac{1}{K} = \frac{1}{30},$$

$$30\left(\frac{1}{B} + \frac{1}{P} + \frac{1}{K}\right) = 1.$$

Последнее равенство означает, что Винни, Пятачок и Кролик польют вместе огород за 30 минут.