

IX Открытый математический турнир 16-17.10.2015
Устная командная олимпиада 9-10 класс

1. Есть 99 палочек с длинами 1, 2, 3, . . . , 99. Можно ли из них сложить контур какого-нибудь прямоугольника?

Можно. Достаточно привести пример такого прямоугольника.

Допустим две стороны по 3 (1+2 объединим)

Подгоняем другие стороны:

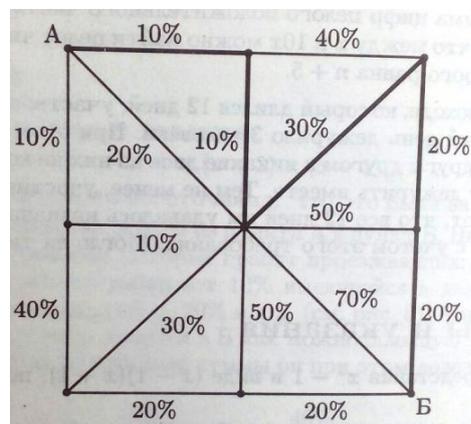
Одна из них: 5+6+9+10+13+14 +..+ 97+98

Другая: 4+7+8+11+12+15+...+96+99

2.

Задача. Купец везет деньги из пункта А в пункт Б. На дорогах водятся разбойники, которые грабят проезжающих: на одной дороге разбойники забирают 10% имеющейся в данный момент суммы, на другой – 20% и т. д. (см. рис.). Как должен ехать купец, чтобы донести в Б как можно большую часть денег? Какую часть исходной суммы он при этом донесет до Б?

Решение. Заметим, что ехать в обход по дорогам, на которых отнимают $a\%$ и $b\%$ соответственно, выгоднее, чем напрямик по дороге, на которой отнимают $(a+b)\%$: в первом случае у купца остается $(1 - \frac{a}{100})(1 - \frac{b}{100})$ часть исходной суммы, а во втором - $(1 - \frac{a+b}{100})$ часть, что меньше. Это можно объяснить и так: при поездке в обход отберут сначала $a\%$ всей суммы и $b\%$ опять же от всей суммы.



Заметим теперь, что начать надо с дороги, отмеченной цифрой 10: в противном случае придется ехать прямо в центр квадрата, а из вышесказанного вытекает, что дорогу из А в центр выгоднее объехать. Далее надо ехать в центр по дороге, на которой отберут еще 10%: в противном случае придется ехать по дороге, на которой отбирают 40%, а эту дорогу выгоднее объехать через центр, по дорогам с отметками 10 и 30. Рассуждая дальше в том же духе, получим оптимальный маршрут, изображенный на рис. Этот маршрут не единствен: ввиду симметрии весь маршрут или его части можно симметрично отразить относительно диагонали АБ. В любом случае самый выгодный маршрут из А в Б проходит по дорогам с отметками 10, 10, 30, 20 и 20; при этом у купца останется $0,9 \cdot 0,9 \cdot 0,7 \cdot 0,8 \cdot 0,8 = 0,36288$ исходной суммы, или 36,288%. Ответ: надо ехать по дорогам с отметками 10, 10, 30, 20 и 20; при этом у купца останется 36,288% исходной суммы.

3. У Васи есть транспортир, он построил угол в 34° и подарил его Ксюше. У Ксюши есть циркуль и линейка, и нет желания просить транспортир у Васи. Ксюше нужно построить угол в 12° . Как она может это сделать?

Одно из решений:

1. Построить угол 68° ,
2. Построить угол 60° ,
3. Построить 8° ,
4. Построить 4° ,
5. Построить 12° .

4. Имеются две кучи камней: в одной - 30, а в другой - 20. Играют двое. За ход разрешается брать любое количество камней, но только из одной кучки. Проигрывает тот, кому нечего брать. Кто выиграет при правильной игре: начинающий игрок или другой?
5. Собрался Иван-царевич на бой со Змеем Горынычем трёхголовым и трёххвостовым. « Вот тебе меч-кладенец, - говорит ему Баба Яга. - Одним ударом ты сможешь срубить либо одну, либо две головы, либо один, либо два хвоста. Запомни: срубишь голову - новая вырастет, срубишь хвост - два новых вырастут, срубишь два хвоста - голова вырастет, срубишь две головы - ничего не вырастет». За сколько ударов Иван - царевич может срубить Змею все головы и хвосты?
1. Отрубил два хвоста - появилась голова.
 2. Отрубил две головы.
 3. Отрубил ещё две головы, остался один хвост.
 4. Срубил оставшийся хвост - появилось два хвоста.
 5. Срубил один из хвостов - выросло ещё два, стало три хвоста.
 6. Срубил один из трёх хвостов - выросло ещё два хвоста, стало четыре хвоста.
 7. Срубил два хвоста из четырёх, выросла голова, и осталось два хвоста.
 8. Срубил последние два хвоста, выросла ещё одна голова, теперь их стало две.
 9. Отрубил две головы - ничего не выросло.

6. В правильном треугольнике ABC со стороной a точки M, N, P и Q расположены так, что $MA + AN = PC + CQ = a$. Найти величину угла $\angle NOQ$.

Согласно условию, $NB = AM$, $BQ = PC$. Поэтому $AN = MC$, $QC = AP$. Заметим, что $\angle BAC = \angle BCA = 60^\circ$. Следовательно, $\triangle ANP = \triangle MQC$ (по двум сторонам и углу между ними). Тогда равны и соответствующие углы этих треугольников: $\angle NPA = \angle MQC$, $\angle ANP = \angle QMC$. Рассмотрим $\triangle MOP$:

$\angle MOP = 180^\circ - \angle OMP - \angle OPM = 180^\circ - \angle QMC - \angle NPA = 180^\circ - \angle ANP - \angle NPA = \angle NAP = 60^\circ$. Тогда и угол $\angle NOQ$, как вертикальный углу $\angle MOP$, равен 60° .

